2025 CANPOINT

全品高考

第二轮专题

主编：肖德好

数学 新高考版 听课手册 YN

延边教育出版社

全品高考第二轮专题 数学 基础版

高三考生 透析命题 聚焦答卷 » 理想的高考成绩

二轮复习

考试多，时间紧
题量大，做不完 ？

《全品高考第二轮专题》—— 精 准 薄

6大模块统领**二轮复习**

8个点拨实现**对点突破**

2页作业精选**优质习题**

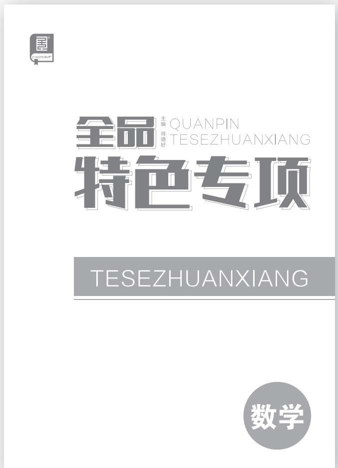
4个专训力争**稳中求进**

二轮复习 有的放矢

跳出题海 精准备考

只做真正的**新课标 新结构**

精选试题，特别关注高考新试卷结构
知识点命题特点、知识点之间的联系
题干特点、选项特点
设问特点、答题特点
… …



抓住**阅卷人眼睛**

1.逻辑清晰，步骤规范。 2.有必要的文字说明，合理使用数学符号。
3.字迹清晰整齐,无错别字。

CONTENTS 目录

01 第一部分　高考专题讲练

高考六大模块题型解法攻略

02 第二部分　特色专项（另附分册）

思想篇 数学思想方法的应用

思想一　函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点与方法来分析研究数学中的数量关系，通过建立函数关系或构造函数，运用函数图象和性质分析、转化和解决问题的一种思维策略．如求数列中的项或最值、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想转化为函数问题．

方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，或者构造方程，通过解方程或方程组，或运用方程的性质去分析、转化和解决问题的一种思维策略．如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题．

函数思想与方程思想密切相关：方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标；函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$，通过方程进行研究；方程 $f(x)=a$ 有解，当且仅当 a 属于函数 $f(x)$ 的值域．函数思想重在对问题进行动态的研究，方程思想则是在动中求静，研究"运动"中的等量关系．

典例精析

1. [2024·沈阳三模] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_3=14$，$S_6=126$，则 $a_6=$（　　）

A. 32　　B. 64

C. 128　　D. 256

[解法关键]

根据等比数列的前 n 项和公式，建立关于首项 a_1 和公比 q 的方程组，直接求解．此种方法是求解数列问题的常用方法．

2. [2024·山西临汾模拟] 已知圆锥的母线长为4，当圆锥的体积最大时，其表面积为（　　）

A. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi+8\pi$

B. 16π

C. $\dfrac{32}{3}\pi+\dfrac{16\sqrt{6}}{3}\pi$

D. $8\sqrt{2}\pi+16\pi$

[解法关键]

根据题意，设圆锥的底面半径为 $r(0<r<4)$，高为 h，求得圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\sqrt{16r^4-r^6}$，令 $f(r)=16r^4-r^6(0<r<4)$，则 $f'(r)=64r^3-6r^5$，利用函数 $f(r)$ 的单调性，计算出圆锥的体积最大时 r 的值，再结合圆锥的表面积公式求解．

自测题

1. 若 $2^a+\dfrac{\ln 2}{2}=3^b+\dfrac{\ln 3}{3}=5^c+\dfrac{\ln 5}{5}$，则（　　）

A. $a\ln 2>b\ln 3>c\ln 5$

B. $c\ln 5>b\ln 3>a\ln 2$

C. $a\ln 2>c\ln 5>b\ln 3$

D. $c\ln 5>a\ln 2>b\ln 3$

2. 若点 O 和点 $F(-2,0)$ 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的中心和左焦点，点 P 为双曲线右支上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围为（　　）

A. $[3+2\sqrt{3},+\infty)$

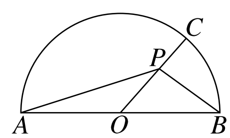
B. $[3-2\sqrt{3},+\infty)$

C. $\left[-\dfrac{7}{4},+\infty\right)$

D. $\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$

3. 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 在 $m\in[-2,2]$ 时恒成立，则 x 的取值范围为________．

4. 如图，半圆的直径 $AB=8$，O 为 AB 的中点，C 为半圆上不同于 A，B 的任意一点，若 P 为半径 OC 上的动点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为________．



思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法. 数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面. 数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

典例精析

1. [2024·湖北武汉三模] 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x-\dfrac{1}{x},x<0,\\ \dfrac{1+\ln x}{x}+2,x>0\end{cases}$ 的图象与直线 $y=a$ 恰好有四个交点，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,2)\cup\{-2\}$

C. $(2,3)$　　D. $[2,3)$

[解法关键]

由已知条件判断函数 $f(x)$ 的单调性及最值、极值等. 值得注意的是当函数单调递增(或单调递减)时，函数的“最大值”(或“最小值”)可能不是 $+\infty$(或 $-\infty$)，在画函数图象简图时要注意这一点. 由已知条件结合函数图象确定实数 a 的取值范围.

2. [2024·重庆南岸区三模] 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 B_1C_1 的中点，N 为底面正方形 $ABCD$ 上的一个动点，且直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则动点 N 的轨迹的长度为________.

[解法关键]

过平面外一点与平面所成的角为定值的直线与平面的交点的轨迹为圆(或圆的一部分)，结合已知条件可确定动点 N 的轨迹是以 G 为圆心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径的一段圆弧. 在正方形 $ABCD$ 中画出圆弧，即可由半径与正方形的边长确定圆弧所对的圆心角，进而求得弧长.

3. 已知关于 x 的函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x-m$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有两个零点 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$________.

[解法关键]

先将函数解析式化成 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-m$，将函数在 $[0,2\pi]$ 上恰有两个零点转化成函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=m$ 的图象在 $[0,2\pi]$ 上恰有两个交点，再充分利用三角函数的对称性，并结合函数图象求解.

自测题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0,\\ e^x(x+1),x\leqslant 0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-b$ 有三个零点，则实数 b 的取值范围是　（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{e^2},0\right)$

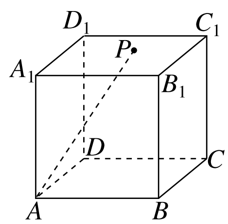
C. $(1,+\infty)\cup\{0\}$　　D. $(0,1]$

2. 已知函数 $f(x)=x\ln x-x+|x-a|$，若 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则实数 a 的取值范围为　（　　）

A. $\left(-\dfrac{1}{e},0\right)\cup(0,e)$　　B. $\left(-\dfrac{2}{e},e\right)$

C. $\left(-\dfrac{2}{e},3\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{e},3\right)$

3. [2024·贵州贵阳三模] 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，点 P 在该正方体的表面上运动，且 $PA=4\sqrt{2}$，如图所示，则点 P 的轨迹长度是________.



4. [2024·甘肃天水模拟] 对任意两个实数 a,b，定义 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,a>b,\end{cases}$ 若 $f(x)=4-x^2$，$g(x)=x^2$，则下列关于函数 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 的说法正确的是　（　　）

A. 函数 $F(x)$ 是奇函数

B. 方程 $F(x)=0$ 有三个解

C. 函数 $F(x)$ 有 3 个单调区间

D. 函数 $F(x)$ 的最大值为 4，无最小值

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略.其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起.使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)由图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论.

典例精析

1. [2024·山西运城模拟] 若函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=1$ 处取得极小值，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,e)$

C. $(-\infty,e)$　　D. $(e,+\infty)$

[解法关键]

解决本题的关键在于对 $\ln a$ 与 1 的大小进行分类讨论，每种情况下对应的导数的正负情况不同，进而影响到函数的单调性及极值的判断.

2. 已知函数 $f(x)=5-\cos 2ax-2\sin ax$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最小值为 $\frac{7}{2}$，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left(-\infty,-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{12},+\infty\right)$

B. $\left(-\infty,-\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},+\infty\right)$

C. $\left[-\frac{\pi}{6},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{12}\right]$

D. $\left[-\frac{\pi}{6},0\right)\cup\left[\frac{\pi}{12},+\infty\right)$

[解法关键]

根据二倍角公式将 $f(x)$ 化简再整理，从而问题可转化为 $\sin ax=\frac{1}{2}$ 在区间 $[-1,2]$ 上有解，再分 $a>0$，$a=0$ 和 $a<0$ 三种情况讨论即可得出答案.

3. 已知直线 $AB\subset$ 平面 α，$AC\perp\alpha$，$BD\perp AB$，BD 与平面 α 成 $30°$ 角，$AB=m$，$AC=BD=n$，则 C 与 D 之间的距离是 (　　)

A. $\sqrt{m^2+n^2}$

B. $\sqrt{m^2+3n^2}$

C. $\sqrt{m^2+n^2}$ 或 $\sqrt{m^2+2n^2}$

D. $\sqrt{m^2+n^2}$ 或 $\sqrt{m^2+3n^2}$

[解法关键]

当已知直线与平面所成的角时，直线的方向向量与平面的法向量的夹角通常存在两种情况，分别求解每种情况下 C 与 D 之间的距离即可.

自测题

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1),x>3,\\2^{x-3}+1,x\leqslant 3,\end{cases}$ 若 $f(a)=3$，则 $f(a-5)$ 的值为 (　　)

A. $\log_2 3$　　B. $\frac{17}{16}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

2. 甲、乙、丙 3 人站到共有 6 级的台阶上，同一级台阶上的人不区分站的位置，则不同的站法种数是 (　　)

A. 120　　B. 210　　C. 211　　D. 216

3. [2024·山东济南模拟] 若函数 $f(x)=6\sin(3x+\varphi)(-\pi<\varphi<2\pi)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值小于 $3\sqrt{3}$，则 φ 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\pi,\frac{11\pi}{6}\right)$

B. $\left(-\pi,-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},2\pi\right)$

C. $\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$

D. $\left(-\pi,-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$

4. [2024·四川雅安三模] 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ $(a>0$ 且 $a\neq\sqrt{2})$，双曲线 $C_2:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 的离心率分别为 e_1,e_2. 若 $e_2=2e_1$，则 a 的取值为________.

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时，采用某种方法将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题，将较难的问题化归为较简单的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题，简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维容易求解的问题，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

典例精析

1. 若函数 $f(x)=x-\frac{4}{x}-a\ln x$ 在定义域内单调递增，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,-4]$

C. $[-4,4]$　　D. $(-\infty,4]$

[解法关键]

将函数的单调性问题转化为导数的正负问题，根据导数的解析式又常常再次转化为一些常见函数的单调性或取值正负问题，转化后要注意自变量的取值范围. 本题中由原函数的单调性转化为求解二次函数恒成立问题，是一种常见的转化方法.

2. [2024・上海浦东新区模拟] 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n-2$，若对任意的正整数 n，$ka_n\leqslant 9^n$ 恒成立，则实数 k 的最大值为________.

[解法关键]

数列具有函数的某些特性，故在解决有关数列的一些问题，如数列最大项、数列不等式等问题时，可借助函数求解. 本题中求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式后，将数列不等式转化为 $k\leqslant\frac{9^n}{3^n+1}=\frac{1}{\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{3^n}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，再令 $t(n)=\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，通过讨论函数 $t(n)$ 的性质，求得其最大值，从而得到 k 的最大值.

自测题

1. 由命题“存在 $x\in\mathbf{R}$，$e^{|x-1|}-m\leqslant 0$”是假命题，得 m 的取值范围是 $(-\infty,a)$，则实数 a 的值是　　(　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

2. 设 m,n,t 为正数，且 $3^m=4^n=5^t$，则　　(　　)

A. $m<n<t$　　B. $n<m<t$

C. $n<t<m$　　D. $t<n<m$

3. 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E,F 分别是 PA,AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为　　(　　)

A. $\sqrt{6}\pi$　　B. 6π

C. 24π　　D. $8\sqrt{6}\pi$

4. [2024・河南濮阳模拟] 已知点 M 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，以 M 为圆心的圆与 x 轴相切于椭圆的焦点 F，圆 M 与 y 轴相交于 P,Q 两点，若 $\triangle PQM$ 是锐角三角形，则椭圆的离心率的取值范围是　　(　　)

A. $(2-\sqrt{3},1)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

方法篇

选择题的特殊解法

方法一　特例法

在解决选择题时，可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果，这种方法称为特例法. 特例法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、烦琐演算的过程，提高了解题的速度. 特例法是考试中解答选择题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

典例精析

1. [2024·江苏泰州模拟] 若 $a>b>0$，则下列不等式中一定成立的是　(　　)

A. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$

B. $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$

C. $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$

D. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$

[解法关键]

对四个选项中的 a，b 分别进行赋值比较大小，或构造函数，利用函数的单调性判断大小，将不正确的选项逐一排除.

2. (多选题)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则　(　　)

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点

[解法关键]

令 $x=y=0$，可知 A 正确；令 $x=y=1$，可知 B 正确；令 $x=y=-1$，可得 $f(-1)=0$，再令 $x=-1$，$y=x$，可知 C 正确，对于 D，不妨令 $f(x)=0$，此时 $f(x)$ 无极值点，故 D 错误.

自测题

1. 若函数 $f(x+1)$是偶函数，则函数 $f(2x)$的图象的对称轴方程是　(　　)

A. $x=0$　　B. $x=1$

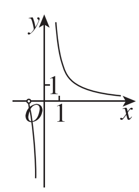
C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=2$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=80$，则 $a_7-\frac{1}{2}a_8$ 的值为　(　　)

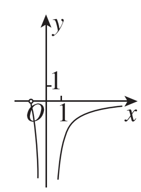
A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

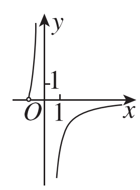
3. 函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)-x}$的图象大致为　(　　)



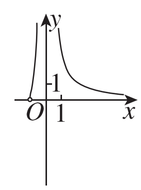
A



B



C



D

4. 已知 P，Q 是椭圆 $3x^2+5y^2=1$ 上满足 $\angle POQ=90^\circ$的两个动点，其中 O 为坐标原点，则$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=$　(　　)

A. 34　　B. 8　　C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{34}{225}$

方法二　验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件,然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时,若能根据题意确定代入顺序,则能提高解题速度.

(1)使用前提:各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧:可以结合特例法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

典例精析

1. [2024·山东济南模拟] 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-f(x)$ 及 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 可以是　　(　　)

A. $f(x)=2\sin\frac{1}{3}x$

B. $f(x)=2\sin 3x$

C. $f(x)=2\cos\frac{1}{3}x$

D. $(x)=2\cos 3x$

[解法关键]

方法一:将各选项中函数所具有的性质与题干中的条件直接进行对比验证,采用排除法,即可得解.

方法二:通过题干条件确定函数的周期与奇偶性,再对选项中的各函数进行验证.

2. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,则下列函数中为奇函数的是　　(　　)

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

[解法关键]

逐项代入验证,可得 $f(x-1)+1=\frac{2}{x}$ 为奇函数,满足条件.

3. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是　　(　　)

A. $(-2,6)$　　B. $(-6,2)$

C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

[解法关键]

当点 P 与点 C 重合时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=6$;当点 P 与点 F 重合时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$.

自测题

1. 下列函数中,在其定义域内既是奇函数又是减函数的是　　(　　)

A. $f(x)=-|x|(x\in\mathbf{R})$

B. $f(x)=-x^3-x(x\in\mathbf{R})$

C. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\in\mathbf{R})$

D. $f(x)=-\frac{1}{x}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 0)$

2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega>0$)图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{12}$,则 ω 的最小值为　　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 10　　D. 16

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+\sqrt{2}$,$a_1=8$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为　　(　　)

A. $a_n=2(n+1)^2$　　B. $a_n=4(n+1)$

C. $a_n=8n^2$　　D. $a_n=4n(n+1)$

4. 已知函数 $f(x)=-x^3-7x+\sin x$,若 $f(a^2)+f(a-2)>0$,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,3)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-2,1)$

自习篇
基础知识自主练习

自习一　集合与常用逻辑用语

1. [2024·天津北辰区三模] 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$M=\{-2,2\}$，$N=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{N}\}$，则 $(\complement_U M)\cap N=$ (　　)

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $[-1,1]$

C. $\{0,1\}$　　D. $[0,1]$

2. 已知命题 p：有些实数的相反数是正数，则 $\neg p$ 是 (　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R},-x<0$

B. $\forall x\in\mathbf{R},-x\leqslant 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R},-x\leqslant 0$

D. $\exists x\in\mathbf{R},-x<0$

3. [2024·湖北武汉模拟] 已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{4}+\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则下列表述正确的是 (　　)

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cup N=\mathbf{R}$

C. $M\subseteq N$　　D. $N\subseteq M$

4. 集合 $M=\{x\mid x=5k-2,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=5n+3,n\in\mathbf{Z}\}$，$S=\{x\mid x=10m+3,m\in\mathbf{Z}\}$ 的关系是 (　　)

A. $S\subseteq P\subseteq M$　　B. $S=P\subseteq M$

C. $S\subseteq P=M$　　D. $P=M\subseteq S$

5. [2024·贵州遵义一模] 已知命题 p：$\forall x>1$，$\ln x>\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^3}$，则 $\neg p$ 为 (　　)

A. $\forall x>1,\ln x\leqslant\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^3}$

B. $\exists x\leqslant 1,\ln x<\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^3}$

C. $\exists x\leqslant 1,\ln x\leqslant\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^3}$

D. $\exists x>1,\ln x\leqslant\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^3}$

6. (多选题)[2024·吉林长春模拟] 已知集合 $A=\{x\mid\log_2 x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$，则 (　　)

A. $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

B. $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

C. $A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

D. $\mathbf{N}^*\cap B$ 的子集个数为 2

7. 若命题“$\forall x\in[1,3]$，$a\leqslant 2^x+2^{-x}$”为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

8. [2024·河南洛阳二模] 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid a\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，若集合 M 有 15 个真子集，则实数 a 的取值范围为____________.

自习二　不等式

1. [2024·陕西榆林模拟] 已知 a 为实数，则“$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$”是“$0<a\leqslant 1$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. [2024·浙江杭州模拟] 若不等式 $kx^2+(k-6)x+2>0$ 的解为全体实数，则实数 k 的取值范围是 (　　)

A. $2\leqslant k\leqslant 18$　　B. $-18<k<-2$

C. $2<k<18$　　D. $0<k<2$

3. 若 $-5<x<-1$，则函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{2x+2}$ 有 (　　)

A. 最小值 1　　B. 最大值 1

C. 最小值 -1　　D. 最大值 -1

4. 已知正数 a,b,c 满足 $b^2=ac$，则 $\frac{a+c}{b}+\frac{b}{a+c}$ 的最小值为 (　　)

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$

C. 2　　D. $\frac{5}{2}$

5. [2024·浙江金华模拟] 设 a,b,c 的平均数为 M，a 与 b 的平均数为 N，N 与 c 的平均数为 P. 若 $a>b>c$，则 ( )

A. $N<P$　　B. $P<M$

C. $N<M$　　D. $M+N<2P$

6. (多选题)[2024·重庆万州区模拟] 已知实数 x,y 满足 $x^2+2y^2+xy=7$，则下列说法正确的是 ( )

A. $x+y\leqslant 2\sqrt{2}$

B. $xy\leqslant 2\sqrt{2}-1$

C. $x^2+y^2\leqslant 6-2\sqrt{2}$

D. $x^2+2y^2\geqslant 8-2\sqrt{2}$

7. (多选题)[2024·广东深圳模拟] 下列说法正确的是 ( )

A. 不等式 $4x^2-5x+1>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x>\frac{1}{4}\text{或 }x<-1\right\}$

B. 不等式 $2x^2-x-6\leqslant 0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant 2\right\}$

C. 若不等式 $ax^2+8ax-21<0$ 恒成立，则 $-\frac{21}{16}<a\leqslant 0$

D. 若关于 x 的不等式 $2x^2+px-3<0$ 的解集是 $(q,1)$，则 $p+q$ 的值为 $-\frac{1}{2}$

8. (多选题)[2024·湖南衡阳模拟] 已知正数 x，y 满足 $x+2y=1$，则下列说法正确的是 ( )

A. xy 的最大值为 $\frac{1}{8}$

B. x^2+4y^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{x}+\sqrt{2y}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值为 $7+2\sqrt{6}$

自习三　复　数

1. [2024·陕西安康模拟] 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=\sqrt{3}$，则复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=$ ( )

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 已知复数 $z_1=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的实部为 a，$z_2=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$ 的虚部为 b，则 $z=a+(b+1)\mathrm{i}$ 的共轭复数在复平面内对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. [2024·宁夏银川二模] 已知复数 z 满足 $|z-4-5\mathrm{i}|=1$，则复数 z 在复平面内对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. [2024·河南信阳模拟] 在复平面内，把复数 $3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量 $\boldsymbol{a}$ 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，所得向量在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量对应的复数是 ( )

A. $2\sqrt{3}-3\mathrm{i}$　　B. $3-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}$　　D. $\frac{3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

5. (多选题)[2024·湖北襄阳模拟] 下列说法正确的有 ( )

A. 若复数 z_1,z_2 满足 $z_1-z_2>0$，则 $z_1>z_2$

B. 若复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $z_1z_2=0$

C. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D. 若复数 z 满足 $z+\frac{1}{z}=-1$，则 $z^{2048}+\frac{1}{z^{2048}}=-1$

6. (多选题)已知复数 $z_0=1-\mathrm{i}$ 和 z，则下列说法正确的是 ( )

A. 若 z 满足 $|z-z_0|=z_0+\overline{z_0}$，则 z 在复平面内对应的点的轨迹是圆

B. 若 z 满足 $|z-z_0|+|z-\overline{z_0}|=3$，则 z 在复平面内对应的点的轨迹是椭圆

C. 若 z 满足 $|z-z_0|-|z-\overline{z_0}|=2$，则 z 在复平面内对应的点的轨迹是双曲线

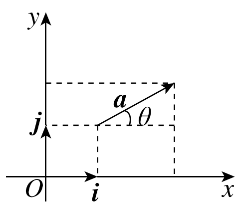
D. 若 z 满足 $|z+z_0+\overline{z_0}|=|z-\overline{z_0}|$，则 z 在复平面内对应的点的轨迹是抛物线

7. 已知 $z=\dfrac{1+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^{2027}}(a\in\mathbf{R})$，若 z 为纯虚数，则 $|z|=$______.

8. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$1\leqslant|z|\leqslant2$，则 $|z+1|$ 的取值范围是________.

自习四　平面向量的线性运算

1. [2024·广西南宁模拟] 如图，分别取与 x 轴，y 轴方向相同的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 作为一个基底，若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (　　)



A. $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

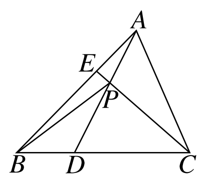
C. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

2. [2024·广东广州二模] 已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 能作为平面向量的一个基底，若 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $(k+1)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 k 的值是 (　　)

A. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. [2024·江苏苏州模拟] 如图，在△ABC 中，点 D,E 分别为 BC 和 BA 的三等分点，点 D 靠近点 B，点 E 靠近点 A，AD 交 CE 于点 P，设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BP}=$ (　　)



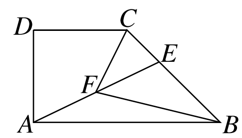
A. $-\dfrac{1}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{7}\boldsymbol{b}$

B. $\dfrac{1}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{7}\boldsymbol{b}$

C. $\dfrac{1}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{7}\boldsymbol{b}$

D. $\dfrac{2}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{7}\boldsymbol{b}$

4. (多选题)如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB\perp AD$，$AB=2AD=2DC$，E 为 BC 边上一点，且 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$，$F$ 为 AE 的中点，则 (　　)



A. $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

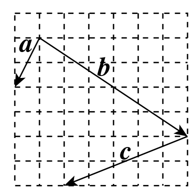
B. $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{BF}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

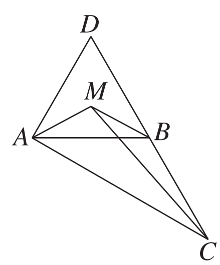
5. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 是一个基底，则实数 λ 的取值范围是________________.

6. [2024·北京朝阳区三模] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}$ 的值为________.



7. [2024·天津南开区二模] 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{AE}=$________；若 $AE=2$，$AF=\sqrt{6}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的值为________.

8. [2024·四川南充模拟] 如图，在△ABC 中，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=BC$，△ABD 是正三角形，点 M 是△ABD 的中心，若 $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，则 $\dfrac{z}{x+y}=$________.



模块一　三角函数与解三角形、平面向量

微专题 1　三角恒等变换与三角函数的图象和性质

【考情分析】

三角恒等变换与三角函数的性质和图象为高考中必考的题目，在高考中一般以小题形式出现，重点考查三角恒等变换求值或以恒等变换为工具求解有关三角函数的性质和图象问题，会涉及图象的平移变换问题. 高考备考中要强化记忆且能熟练应用有关结论，并能够根据图象求解相应的性质问题.

微点 1　三角恒等变换

例 1 (1)[2024·山西大同二模] 已知 $\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，则 $\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $2-\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

(2)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$ (　　)

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

【规律提炼】

三角恒等变换问题主要有两类，一是求值问题，二是函数式的结构变换问题.

1. 三角函数求值问题的类型及解题方法.

(1)“给角求值”：若所给出的角是非特殊角，则要注意各个角之间的和差关系、互补(余)关系、倍半关系等，从而选择相应的公式，把非特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数，进而求值.

(2)“给值求值”：解题关键在于能够利用已知角和特殊角表示所求角，同时还要注意半角和倍角间的关系以及诱导公式的应用.

2. 三角函数式结构变换的步骤：一般要先进行“降幂”，然后应用辅助角公式、三角恒等变换等转化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式.

【巩固训练】

1. [2024·陕西安康模拟] 将函数 $f(x)=4\sin x+3\cos x$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得到函数 $g(x)=5\sin x$ 的图象，则 $\sin\varphi=$ (　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

2. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

微点 2　三角函数的图象与性质

考向 1　三角函数图象的变换

例 2 (1)[2024·四川遂宁二模] 已知曲线 $C_1: y=\sin x$，$C_2: y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是 (　　)

A. 把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

(2)已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\theta)+\cos(x+\theta)(\theta>0)$，将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 为偶函数，则 θ 的最小值为（　　）

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{7\pi}{12}$

C. $\frac{11\pi}{24}$　　D. $\frac{13\pi}{24}$

【规律提炼】

解决三角函数图象变换问题的一般步骤：①统一函数名称，若是两个不同"名"函数图象间的变换，要先将函数"名"统一，再进行相应变换；②确定是先平移变换还是先伸缩变换，平移变换确定平移量时，要先将 x 的系数（不为 1）提取后再确定，伸缩变换不影响 φ 值，而只针对 x 的系数.

考向 2　三角函数的性质及其应用

例 3 (1)在下列区间中，为函数 $f(x)=7\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的一个单调递减区间的是（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$

(2)（多选题）[2024·河南洛阳模拟] 已知函数 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$

B. 点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$为 $f(x)$ 的图象的一个对称中心

C. 若关于 x 的方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right]$ 时有两个不同的实数根，则$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<1$

D. 若 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则函数 $y=f(x)+f'(x)$ 的最大值为$\sqrt{10}$

【规律提炼】

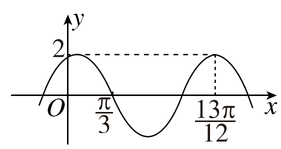
解决与三角函数的性质有关的问题，一般要先将函数解析式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$）的形式.

求解与三角函数的性质有关的问题的关键是应用正弦、余弦、正切函数的性质结合相应函数图象，采用直接法或整体思想求解. 一般地求解单调区间、对称轴（或对称中心）、周期等问题可直接应用"母函数"的性质求解. 若求解已知区间内的单调性或零点等问题，可将其转化为 $\omega x+\varphi$ 的范围，进而结合正弦函数或余弦函数或正切函数的性质和图象求解.

注意：在求解此类函数的单调区间问题时，若 $\omega<0$，要先利用诱导公式将 x 的系数转化为 $|\omega|$，再结合 A 的正负情况求解.

考向 3　图象与性质的综合应用

例 4 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为________.



【规律提炼】

三角函数的图象与性质的综合问题一般会涉及零点、方程、不等式、对称轴（或对称中心）、周期、单调区间等. 解决问题的关键：一是根据图象能够分析有关的性质；二是能够确定解析式，并根据解析式利用整体代换的方法，对比正弦、余弦、正切函数的性质进行求解. 注意数形结合思想和函数与方程思想的应用.

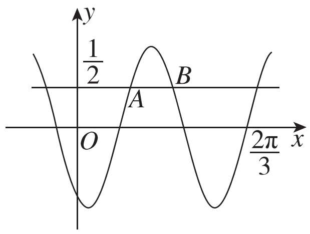
微点 3　求解参数值或范围问题

例 5 (1)[2024·重庆沙坪坝区模拟] 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 在$[-2m,m](m>0)$上单调递增，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{11\pi}{48}\right]$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{24}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{24},\frac{11\pi}{48}\right]$　　D. $\left(\frac{\pi}{24},\frac{11\pi}{48}\right]$

(2)[2023·新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,如图,$A$,$B$ 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点,若 $|AB|=\frac{\pi}{6}$,则 $f(\pi)=$________.



【规律提炼】

求解 φ 的值主要应用赋值法,一般是应用作图的五个关键点.若 φ 没有明确的范围限制,则其值要表示为“$+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的形式.求解 ω 的值一般与周期性、对称性、单调性、零点等有关,经常应用整体代换的方法与正弦、余弦、正切函数的性质综合应用进行求解.其他的参数问题主要应用三角函数的性质,结合函数图象合理建立方程(组)或不等式(组)求解.

品点拨1 ω范围问题

点拨1 与对称有关的问题

例1 (1)已知函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1(\omega>0)$ 的图象在区间 $(0,2\pi)$ 内至多存在 3 条对称轴,则 ω 的取值范围是 (　　)

A. $\left(0,\frac{5}{3}\right]$　　B. $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$

C. $\left[\frac{7}{6},\frac{5}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$

(2)[2022·新高考全国Ⅰ卷] 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T,若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$,且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称,则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ (　　)

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【技巧点拨】

(1)对于函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

$$\begin{cases}\text{对称轴 } x=a\xrightarrow{a\neq0}a\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\omega=\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varphi}{a},\\ \text{对称中心}(b,0)\xrightarrow{b\neq0}b\omega+\varphi=k\pi\Rightarrow\omega=\dfrac{k\pi-\varphi}{b},\end{cases}$$

$k\in\mathbf{Z}$.

$$\left.\begin{cases}\text{对称轴 } x=a\xrightarrow{a=0}\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,\\ \text{对称中心}(b,0)\xrightarrow{b=0}\varphi=k\pi,\end{cases}\right. k\in\mathbf{Z}.$$

分开表达时注意需要不同的 k,比如

$$\begin{cases}\text{对称轴 } x=a,\\ \text{对称中心}(b,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z}),\\ b\omega+\varphi=k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

(2)设 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 T.

对称轴 $x=a,x=b\longrightarrow|b-a|=\frac{n}{2}T(n\in\mathbf{N}^*)$;

对称中心 $(a,0),(b,0)\longrightarrow|b-a|=\frac{n}{2}T(n\in\mathbf{N}^*)$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } y=1 \text{ 时},x=a,\\ \text{当 } y=-1 \text{ 时},x=b\end{array}\right\}\longrightarrow|b-a|=\frac{(2n-1)}{2}T(n\in\mathbf{N}^*);$$

对称轴 $x=a$,对称中心 $(b,0)\longrightarrow|b-a|=\frac{(2n-1)T}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

点拨2 与单调性有关的问题

例2 (1)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$,若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴,点 $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心,且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调,则 ω 的最大值为 (　　)

A. $\frac{9}{17}$　　B. $\frac{18}{17}$　　C. $\frac{12}{17}$　　D. $\frac{24}{17}$

(2)[2024·湖南邵阳一模] 已知函数 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\frac{17}{72}a\right]$ 上单调递增,在 $\left[\frac{17}{9}a,\frac{10\pi}{9}\right]$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left[0,\frac{7\pi}{17}\right]$　　B. $\left[\frac{6\pi}{17},\frac{7\pi}{17}\right]$

C. $\left[\frac{7\pi}{17},\frac{8\pi}{17}\right]$　　D. $\left[\frac{8\pi}{17},\frac{9\pi}{17}\right]$

【技巧点拨】

函数在某区间内单调,则其区间长度小于等于半个周期,而且要符合相应函数的单调区间范围.

$$
\begin{array}{l}
y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)\\
\text{(区间的开闭不影响结果)}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{在}(a,b)\text{上单调递增}\longrightarrow\begin{cases}|b-a|\leqslant\dfrac{T}{2},\\-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant a\omega+\varphi<b\omega+\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}(a,b)\text{上单调递减}\longrightarrow\begin{cases}|b-a|\leqslant\dfrac{T}{2},\\\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant a\omega+\varphi<b\omega+\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}(a,b)\text{上单调}\longrightarrow\begin{cases}|b-a|\leqslant\dfrac{T}{2},\\-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\leqslant a\omega+\varphi<b\omega+\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}(a,b)\text{上不单调}\longrightarrow a\omega+\varphi<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<b\omega+\varphi,k\in\mathbf{Z}.
\end{array}
\right.
$$

点拨 3　与零点有关的问题

例 3 (1)[2022·全国乙卷] 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为 T.若 $f(T)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$x=\dfrac{\pi}{9}$为 $f(x)$的零点,则 ω 的最小值为________.

(2)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$在区间$[0,2\pi]$有且仅有 3 个零点,则 ω 的取值范围是________.

(3)[2024·河北名校联盟三模] 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0,x\in\mathbf{R})$在区间$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$内没有零点,则 ω 的取值范围为____________.

【技巧点拨】

$$
\begin{array}{l}
y=\sin(\omega x+\varphi)\\
(\omega>0)(n\in\mathbf{N}^*)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{在}(a,b)\text{内无零点}\longrightarrow\begin{cases}|b-a|\leqslant\dfrac{T}{2},\\k\pi\leqslant a\omega+\varphi<b\omega+\varphi\leqslant(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}(a,b)\text{内有 }n\text{ 个零点}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{(n-1)T}{2}<|b-a|\leqslant\dfrac{(n+1)T}{2},\\k\pi\leqslant a\omega+\varphi<(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z},\\(k+n)\pi<b\omega+\varphi\leqslant(k+n+1)\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}[a,b)\text{内有 }n\text{ 个零点}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{(n-1)T}{2}<|b-a|<\dfrac{(n+1)T}{2},\\k\pi<a\omega+\varphi\leqslant(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z},\\(k+n)\pi<b\omega+\varphi\leqslant(k+n+1)\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}[a,b]\text{内有 }n\text{ 个零点}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{(n-1)T}{2}\leqslant|b-a|<\dfrac{(n+1)T}{2},\\k\pi<a\omega+\varphi\leqslant(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z},\\(k+n)\pi\leqslant b\omega+\varphi<(k+n+1)\pi,k\in\mathbf{Z};\end{cases}\\
\text{在}(a,b]\text{内有 }n\text{ 个零点}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{(n-1)T}{2}<|b-a|<\dfrac{(n+1)T}{2},\\k\pi\leqslant a\omega+\varphi<(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z},\\(k+n)\pi\leqslant b\omega+\varphi<(k+n+1)\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}\\
\text{规律:区间左端点和其对应不等式左侧的等号只能有一个;右端点也同理.}
\end{array}
\right.
$$

微专题 2　平面向量

【考情分析】

平面向量为高考中的常考内容,主要考查平面向量数量积的运算及其应用,具体内容涉及求解模长、夹角和参数等问题.试题主要以选择题或填空题的形式考查,难度不大,属于满分题型.备考中要熟练掌握平面向量数量积的定义式与坐标运算公式,并且能够应用向量的“数形结合”特性求解相应问题.

微点 1　平面向量的模与夹角

例 1 (1)[2024·新课标Ⅱ卷] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$,且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{b}|=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

(2)[2023·全国甲卷] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=$ (　　)

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

【规律提炼】

向量的模与夹角问题的求解策略:

(1)根据夹角公式和模的公式求解两个向量的数量积或者相关向量的模,具体问题中若已知两个向量的模的关系或者向量方程,则常常通过平方运算求解;

(2)若向量之间存在垂直关系,则可建立平面直角坐标系,将问题转化为向量的坐标运算,应用代数方法求解有关问题;

(3)若存在或可以得到动端点的向量的模为定值,则可应用几何法(常常是与圆有关)求解有关的模或角的范围问题.

【巩固训练】

1. [2024·成都模拟] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,若 $\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,则 $|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

2. [2024·湖南岳阳模拟] 在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在边 BC 上,且满足 $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$,若向量 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=$________.

微点 2　平面向量的数量积

例 2 (1)[2022·北京卷] 在△ABC 中,$AC=3$,$BC=4$,$\angle C=90°$.P 为△ABC 所在平面内的动点,且 $PC=1$,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 (　　)

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$

C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

【规律提炼】

向量数量积求值及范围问题的求解策略:

(1)向量的数量积常通过平方或向量的运算求解;

(2)向量数量积的范围问题,一般应用代数方法,将其转化为函数,进而应用函数方法或三角不等式求解.

若根据条件适合建立平面直角坐标系,一般通过建系利用坐标运算,再结合函数方法求解.

【巩固训练】

1. [2024·安徽芜湖模拟] 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1,点 E,F 分别是 BC,CD 的中点,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=$ (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的最小值为 (　　)

A. $12-6\sqrt{3}$　　B. $12-4\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

微点3　参数的取值(范围)

例3 (1)[2022·新高考全国Ⅱ卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$, $\boldsymbol{b}=(1,0)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$,若 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$,则实数 $t=$ (　　)

A. -6　　B. -5

C. 5　　D. 6

(2)[2024·新课标Ⅰ卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,x)$,若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,则 $x=$ (　　)

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

【规律提炼】

向量参数问题的求解策略:

此类问题一般涉及夹角、模、数量积求值、向量位置关系等内容,解题的关键是在掌握以上相关问题解决方法的基础上,应用方程思想求解.

【巩固训练】

已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$,若向量 $2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的夹角是锐角,则 λ 的取值范围为________________.

【深度挖掘】

微点3【巩固训练】中"两个向量的夹角为锐角"是"两个向量的数量积大于0"的充分不必要条件,所以应用 $(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})>0$ 求解 λ 的取值范围的过程中,还需排除同向共线的情况.同理,若将问题改为夹角为钝角,则满足 $(2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})<0$ 的同时,还需排除两个向量反向共线的情况.

微专题3　解三角形

【考情分析】

解三角形是高考中的必考内容,试题主要以应用正弦定理、余弦定理求解三角形的边长、角、面积、周长等问题为主,也会涉及角平分线、中线等内容.试题常常与基本不等式、三角恒等变换、向量、三角函数等知识综合考查.试题主要以解答题的形式考查.高考备考中要熟练掌握与面积、周长有关的常见题型的解题方法,还要充分理解正弦定理、余弦定理的应用条件,并能够准确应用基本不等式和三角函数的有界性求解有关的范围、最值问题.

微点1　应用正弦定理、余弦定理解三角形

例1 [2024·天津卷] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $\cos B=\frac{9}{16}$, $b=5$, $\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$.

(1)求 a;

(2)求 $\sin A$;

(3)求 $\cos(B-2A)$.

【规律提炼】

应用正弦定理和余弦定理解三角形的策略:

(1)正弦定理可实现边与角正弦的互化,当题中存在关于边或角正弦的齐次等式或分式时,可直接应用正弦定理进行边与角正弦的互化,一定要注意必须是"齐次"的等式或"齐次"的分式才可实现互化;

(2)余弦定理主要可实现边的平方与角余弦之间的互化,当题中存在边的平方时一般可应用余弦定理将其转化为角的余弦.

(3)当条件等式中三角形的三个内角都出现时,一般都会应用内角和为 π 并结合三角恒等变换进行消角,即"三角齐出,必减角".

【巩固训练】

在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b^2-a^2=ac$.

(1)若$B=\frac{\pi}{3}$,求角C的大小;

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形,求$\frac{b}{a}$的取值范围.

微点2　三角形中"多条线"问题

例2　在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,其外接圆的半径为$2\sqrt{3}$,且$b\cos C=a+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

(1)求角B的大小;

(2)若角B的平分线交AC于点D,$BD=\sqrt{3}$,点E在线段AC上,$EC=2EA$,求$\triangle BDE$的面积.

【规律提炼】

三角形中的"多条线"常常有角平分线、中线、高线、定比分点线段等,具体问题中有着相应的常用方法和思维切入点.

(1)角平分线,可以应用角平分线定理,大小三角形的面积关系以及作平行线等方法求解.大小三角形的面积关系是角平分线问题常用的方法,例如例2(2)中的$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$,进而应用三角形面积公式即可得到相应关系式.

(2)中线及定比分点线段,可以应用向量、补平行四边形、互补角等方法求解,其中将中线或定比分点线段用与其相邻两边对应的向量线性表示是常用的方法.

(3)高线常常应用面积或向量法求解.

【巩固训练】

[2024·河北"五个一"名校联盟一联]在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$(\sin A-\sqrt{3}\sin B)a=(c-b)(\sin C+\sin B)$.

(1)求角C的大小;

(2)若$c=2$,边AB的中点为D,求中线CD的长的最大值.

微点3　求解三角形的面积和周长问题

考向1　求解三角形的面积、周长

例3［2023·全国甲卷］记△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

(1)求bc；

(2)若$\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\frac{b}{c}=1$，求△$ABC$的面积.

例4［2024·新课标Ⅱ卷］记△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1)求A；

(2)若$a=2,\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求△$ABC$的周长.

【规律提炼】

余弦定理是求解三角形面积和周长问题常用的“工具”，这是因为余弦定理中不仅有面积公式所需的“两边积”，而且可以将两边平方和转化为两边和的平方与两边积的形式，例如$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}$，所以具体问题中要注意对余弦定理的应用.

考向2　求解三角形面积、周长的范围、最值

例5［2024·四川南充模拟］已知△ABC满足$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin C}$.

(1)求A；

(2)若$BC=3$，求△ABC的周长的最大值.

例 6 [2024·安徽六安三模] 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$a\cos(B-C)+a\cos A-2\sqrt{3}c\sin B\cos A=0$.

(1)求角A的大小;

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形,且$c=1$,求$\triangle ABC$的面积的取值范围.

【规律提炼】

三角形的面积和周长范围问题的求解策略:

求解三角形面积或周长的最值、范围问题,可以应用余弦定理和基本不等式求解.若已知三角形的类型,则常常先应用正弦定理将其转化为角的形式,再应用三角函数有界性或辅助角公式求解.

【深度挖掘】

例5和例6涉及应用基本不等式和三角函数的有界性求解最值问题,根据条件不同也可以有其他的变换情况.

(1)例5中得到的"$b^2+c^2+bc=9$"具有"双向转化性",既可以求解面积的最值,也可以如本题一样求解周长的最值.若求解面积最值,则由$b^2+c^2+bc=9\geqslant 2bc+bc$,即可得到$bc$的最大值为3,进而得到面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.转换的原则是:若求周长的取值范围,则将其应用基本不等式得到关于$b+c$的一元二次不等式,若求解面积最值,则将其应用基本不等式转化为关于bc的不等式即可.当然此类试题也可以应用正弦定理转化为角,即$b+c=2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right]$,进而应用辅助角公式和三角函数有界性求解.

(2)例6条件中已知三角形为锐角三角形,此时不方便用基本不等式求解,可应用正弦定理,将面积转化为角的形式求解.本例题中已知的是A与c,即不是对边对角,此类试题一般都能转化为关于正切函数的最值问题,若已知的是对边和对角,则可以转化为关于正弦、余弦的二倍角形式,且应用辅助角公式求解函数的最值.关于细化角的范围,要保证所有的角都用同一个角来表示,并且满足所有角都为锐角.